• FOLHA Nº 13 – GABARITO COMENTADO •

1) Isto é apenas análise de coeficientes:
a concavidade da parábola está para baixo, portanto, o coeficiente *"a"* é negativo ($a < 0$);
a parábola corta o eixo *Y* (eixo vertical) em um ponto acima da origem, logo *"c"* é positivo ($c > 0$);
após o ponto de corte do eixo *Y*, a parábola sobe, então *"b"* é positivo;
resposta certa letra "E"
OPÇÃO E

2) no gráfico é indicado quais são as raízes da função (– 3/2 e 3), então sabemos quais são os fatores da equação $(x + 3/2)$ e $(x - 3)$. Agora efetuando a multiplicação entre estes dois fatores, achamos uma suposta equação para este gráfico:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right) \times (x - 3) = x^2 - \frac{6x}{2} + \frac{3x}{2} - \frac{9}{2}$$

$$x^2 - \frac{3x}{2} - \frac{9}{2}$$

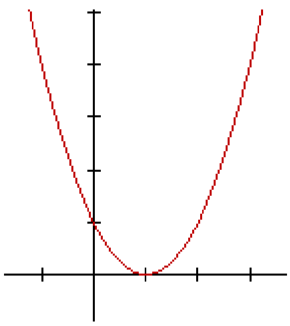
mas esta é somente uma suposta equação, pois veja quanto vale seu coeficiente *"c"*. Ele vale – 9/2, e no gráfico mostra que ele deve valer "– 9". Então, o que devemos fazer para – 9/2 virar – 9? Isso mesmo, multiplicar TUDO por 2. Daí teremos a equação certa.

$$2x^2 - 3x - 9$$

OPÇÃO C

3) é dada uma equação incompleta, sendo indicado somente o valor de "a" ($a = 1$). Porém, no gráfico podemos descobrir as raízes e achar os fatores da função. As raízes são 0 e 3, portanto os fatores, $(x - 0)$ e $(x - 3)$. Vamos multiplicar os fatores:
$(x - 0) \times (x - 3) = x(x - 3) = x^2 - 3x$
agora sabemos qual é a equação, e é pedido o valor mínimo da função (Yv). Colocando na fórmula: $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-9}{4}$
OPÇÃO C

4) esta é uma questão de análise de sinal, pois a equação dada pode ser escrita da seguinte forma:
$x^2 + 1 > 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 > 0$
Aplicando Bhaskara, achamos 1 e 1 (raízes idênticas). Portanto, o esboço do gráfico é assim:



o exercício pede quando ela é positiva. Veja que ela está toda em cima da origem, mas atenção no ponto $x = 1$. Ela vale ZERO, e zero não é positivo nem negativo, portanto ela será positiva em todos os números, menos no 1.
OPÇÃO D

5) Temos $2x^2 - 12xy + ky^2 = 2(x - 3y)^2 + (k - 18)y^2$. Assim, se $K \geq$ então $2x^2 - 12xy + ky^2 \geq 0$ para todos x, y reais. Além disso, tomando $x = 3y > 0$, para $k < 18$ obtemos $2x^2 - 12xy + ky^2 < 0$. Logo o menor valor de k é 18.

OPÇÃO C

6) $P(x) = 2(x^{2010} - 1) - 5x^2 - 13x + 9$

$x^{2010} - 1 = (x^3)^{670} - 1$ é divisível por $x^2 + x + 1$ uma vez que $x^3 - 1 = (x - 1) \cdot x^2 + x + 1$

Assim, o resto da divisão de P(x) por $x^2 + x + 1$ é igual ao resto da divisão de $-5x^2 - 13x + 9$ por $x^2 + x + 1$ que é $R(x) = -8x + 14$, logo $R(2) = -2$.

OPÇÃO E

7) Como $m \leq n$, a diferença entre os polinômios terá o grau do maior dele.

OPÇÃO E

8) Vamos lembrar da fatoração $x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$. isso significa que ao dividirmos $x^3 - 1$ por $x^2 + x + 1$, o resto da divisão é zero. logo $x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1$.

Vamos manipular o dividendo.

$P(x) = 2(x^{2010} - 1) - 5x^2 - 13x + 9$

$P(x) = 2((x^3)^{670} - 1) - 5x^2 - 13x + 9$

$P(x) = -5x^2 - 13x + 9$, basta dividir este resultado por $x^2 + x + 1$ cujo resto é $-8x + 14$.

$r(2) = -8(2) + 14 = -2$.

OPÇÃO E

9) Teorema de Bolzano:

Dada a função(x), definida para um intervalo]a,b[temos que:

f(a).f(b) < 0 Existe um número ímpar de raízes no intervalo]a,b[

f(a).f(b) >0 Existe um número par ou zero raízes no intervalo]a,b[

f(a).f(b) =0 a ou b é raiz.

OPÇÃO D

10) Dado o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$, de acordo com o enunciado do problema:

$P(1) = 2 \rightarrow 2 = 1^5 + a.1^4 + b.1^2 + c.1 + 1 \rightarrow 0 = a + b + c$

$P(-1) = 3 \rightarrow 3 = (-1)^5 + a.(-1)^4 + b.(-1)^2 + c.(-1) + 1 \rightarrow 3 = a + b - c$

$P(2) = 0 \rightarrow 0 = 2^5 + a.2^4 + b.2^2 + c.2 + 1 \rightarrow -33 = 16a + 4b + 2c$

$a + b + c = 0$

$a + b - c = 3$

$16a + 4b + 2c = -33$

Logo, $a = -3$; $b = \dfrac{9}{2}$; $c = -\dfrac{3}{2}$

E portanto $\dfrac{a.b}{c} = 9$.

OPÇÃO E

11) Pelo teorema do resto, temos:

$x + 1 = 0$

$x = -1$

$p(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) + 1$

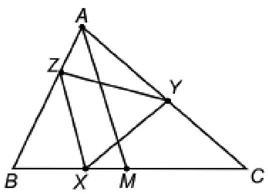
$p(-1) = 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7$

OPÇÃO C

12) Seja M o ponto médio de BC como $\frac{CX}{BC}=2$, $CX=\frac{2}{3}BC$ e $BX=\frac{1}{3}BC$ de modo que

$XM = BM - BX = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC = \frac{1}{6}BC = \frac{1}{2}BX$

Assim, $\frac{BZ}{AZ} = \frac{BX}{XM}$ de modo que $\Delta BXZ \sim \Delta BMA \Rightarrow \frac{XZ}{MA} = \frac{BX}{BM} = \frac{\frac{1}{3}BC}{\frac{1}{2}BC} = \frac{2}{3}$.



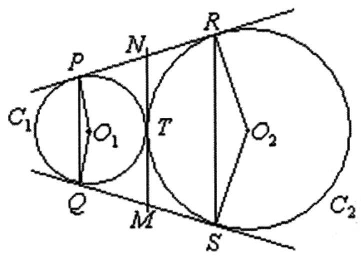
Logo os lados de XYZ são iguais a $\frac{2}{3}$ das medianas de ABC. Assim, XYZ e o triângulo cujos lados são congruentes às medianas de ABC são semelhantes de razão $\frac{2}{3}$ e a razão entre suas áreas é $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

OPÇÃO C

13) Temos, ambos os ângulos e são retos, de modo que os triângulos *KAL* e *LBM* são congurentes. Portando, sendo $x = AK$, $AL = 4 - x$, $LB = x$ e $BM = AL = 4 - x$. Logo a área do trapézio *AKMB* é igual a e, consequentemente, a érea *CDKM* é $4^2 - 8 = 8$

OPÇÃO B

14)



Sejam O_1 e O_2 os centros de C_1 e C_2, respectivamente. Os triângulos O_1PQ e O_2RS são semelhates, assim.

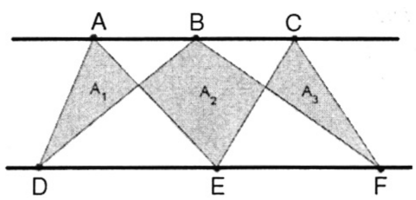
$\frac{PQ}{RS} = \frac{O1P}{O2R} = \frac{3}{4}$ Além disso, os segmentos tangentes NP, NT e NR são congruentes e MN é paralelo a PQ e RS.

Assim, M e N são pontos médios de QS e PR, respectivamente. Assim, MN é base média do trapézio PQSR, de modo que $MN = \frac{PQ+RS}{2}$. Assim, $\frac{PQ}{3} = \frac{RS}{4} = \frac{MN}{\frac{3+4}{2}} = \frac{MN}{3,5}$.

A razão entre as áreas dos trapézios MNPQ e MNRS, que têm alturas iguais, é $\frac{\frac{MN\,PQ}{2}}{\frac{MN + RS}{2}} = \frac{3,5+3}{3,5+4} = \frac{13}{15}$

OPÇÃO E

15)

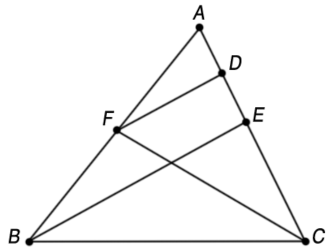


Seja *P* o ponto de interseção dos segmentos *DB* e *AE*; e Q o ponto de interseção de *CE* e *BF*. Note que os triângulos *ADE* e *BDE* possuem a mesma altura e a mesma base, logo possuem a mesma área. O mesmo ocorre com os triêngulos *BEF* e *CEF*. Retirando as áreas comuns *PDF* e *QEF*, temos que [*ADP*] = [*PBE*] e [*BEQ*] = [*QCF*]. Logo, $A_2 = A_1 + A_3$.

Observação: [*XYZ*] denota a área do triângulo *XYZ*.

OPÇÃO B

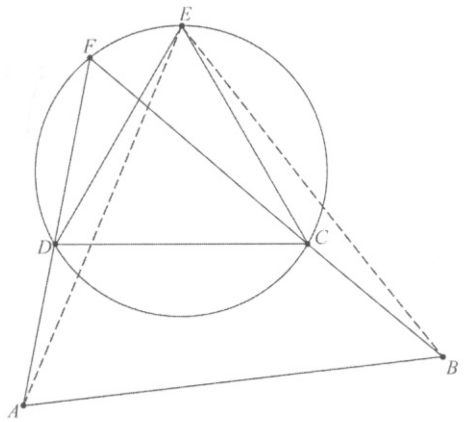
16)



Seja D o pé da perpaendicular baixada de F a AC. Pelo teorema de Pitágoras, segue que $EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Por outro lado, por semelhança de triângilos temos $FD = \frac{1}{2}BE = 2$ e $AE = 2DE$. Portento, $DC = \sqrt{CF^2 - FD^2} = \sqrt{4^2\ 2^2} = 2\sqrt{3}$ e daí $DE = 2\sqrt{3} - 3$, de maneira que $AE = 4\sqrt{3} - 6$. Finalmente, $[ABC] = \frac{1}{2}(AE + EC)\,BE = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{3} - 6 + 3\right).4 = 8\sqrt{3} - 6$

OPÇÃO A

17)



Prolongue AD e BC até se encontrarem no ponto F. Veja que $\angle AFB = 60° = \angle DEC$. Com isso, o quadrilátero $FECD$ é inscritível. Temos:

(i) $\angle FDE = \angle FCE = \alpha \rightarrow \angle ADE = \angle BCE = 180° - \alpha$.

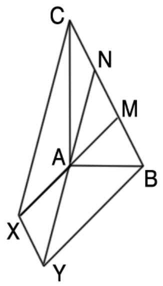
(ii) $AD = BD$ e $ED = EC$.

De (i) e (ii), concluímos que $\Delta ADE \equiv \Delta BCE$. Portanto, $EA = EB$.

Além disso, $\angle DEA = \angle CEB$, de onde concluímos que $\angle AEB = \angle DEC = 60°$. Dessa forma, o trângulo ABE é equilátero de lado 8 e sua área é igual a $\frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

OPÇÃO C

18)



Observe que os triângulos AXY e ANM são congruentes, e $<YXA = <AMN$. Assim, $XY \,||\, MN$ e como $XY = MN = MC = NB$, segue que os quadriláteros $XYCM$ e $XYNB$ são paralelogramos, como A é ponto médio de XM e NY temos que $[AYC] = [BAX] = (2/3).12 = 8$. Logo, $[XYCB] = (8/3).12 = 32$.

OPÇÃO D

19) Seja J a interseção dos segmentos BC e FG. Como M é ponto médio do segmento BC, oposto ao vétice E, conclui-se que EF é diâmetro, e $\angle FGE = \angle BMF = 90°$. Sendo $ABCDE$ um pentágono regular, $\angle ABC = 108°$.

No ΔGHI : $\angle GHI = \alpha \Rightarrow \angle GIH = 90° - \alpha$.

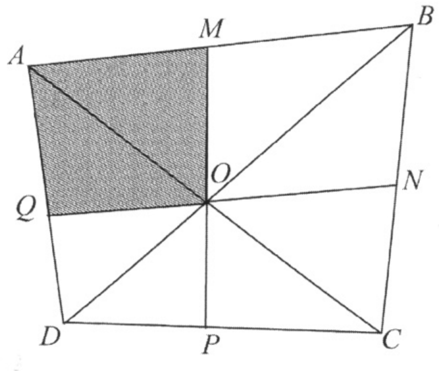
No ΔBJH : $\angle BHJ = \alpha \Rightarrow \angle BJH = 72° - \alpha$.

No ΔFJM : $\angle FJM = 72° - \alpha \Rightarrow \angle JFM = 18° + \alpha$.

Para que os triângulos EFG e HIG sejam semelhante, como $\alpha \neq 18° + \alpha$, a única possibilidade é termos $90° - \alpha = 18° + \alpha \rightarrow \alpha = 36°$

OPÇÃO E

20) Ligando o ponto de interseção das retas que representam as duas cercas aos vértice, obtemos:



Observamos que, como AQ = QD e as alturas de OAQ e OQD que passam por O são iguais, as áreas de OAQ e OQD são iguais.

Analogamente, as áreas de OAM e OMB; OBN e ONC; OCP e OPD são iguais. Logo área OAQ + área OAM + área OCP + área ONC = área OQD + área OMB + área OPD + área OBN → área AMOQ + área CNOP = área DPOQ + área BMON → área AMOQ = 200 + 250 – 210 = 240

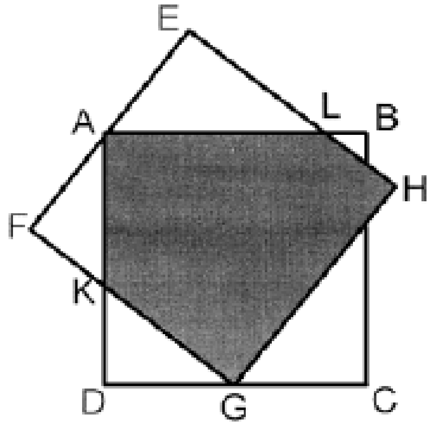
OPÇÃO C

21) Sejam K a interseção dos lados AD e FG, L a interseção dos lados AB e EH. Por simetria, veja que KD = KF e AK = KG. Considere FK = x. Dessa forma, AK = 48 – x. Usando teorema de Pitágoras no triângulo AFK, temos: $24^2 + x^2 = (48 - x)^2$.

Que nos dá x = 18.

Agora, veja que os triângulos AFK e ALE são semelhantes. Portanto, $\frac{AE}{FK} = \frac{EL}{AF}$. Assim, EL = 32.

Para achar a área procurada, basta subtrair a área do quadrado EFGH das áreas dos triângulos AFK e AEL. Portanto a área será 1704.

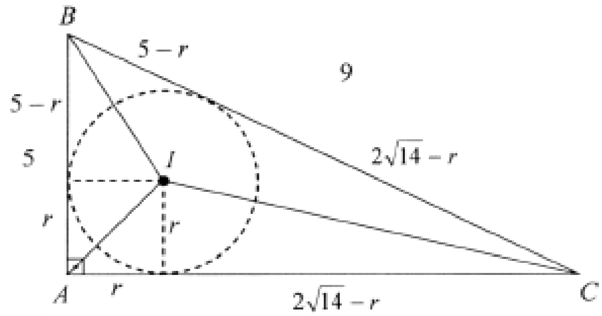


OPÇÃO A

22) Pelo teorema de Pitágoras, é imediato que $AC^2 = 9^2 - 5^2 = 56 \therefore AC = 2\sqrt{14}$.

Seja r o raio do círculo inscrito, como mostrado na figura. Como os comprimentos das tangentes ao círculo inscrito partindo de cada vértice são iguais, ficamos com a equação $(5-r)+(2\sqrt{14}-r) = 9$, onde obtemos $r = \sqrt{14}-2$. Novamente pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$CI2 = r2 + \left(2\sqrt{14}-r\right)^2 = \left(\sqrt{14}-2\right)^2 + \left(\sqrt{14}+2\right)^2 = 36 \therefore CI = 6.$

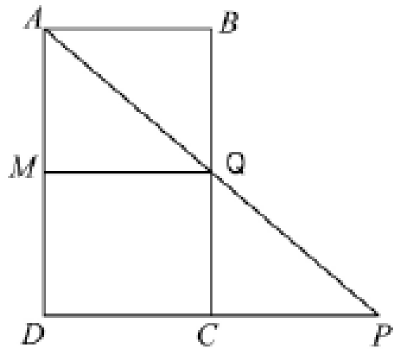


OPÇÃO D

23) Pelo teorema de Pitágoras, temos que $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 20$ e que $CB = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 25$. Os triângulos ABC e ADB são semelhantes pois os seus lados são proporcionais e consequentemente temos $EAB = EBA$ e . $ACB = 90 - EBA = 90 - EAB = CAE$ Concluímos assim que E é o ponto médio de CB e a área procurada é metade da área do triângulo CAB, ou seja, $\frac{15.20}{4} = 75.$

OPÇÃO B

24) Traçando uma paralela a DC por Q, temos que Área(ABQ) = Área(AQM). Logo Q é ponto médio de BC.



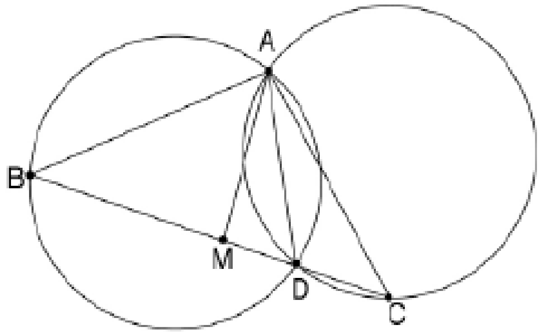
Dessa forma os triângulos ABQ e QCP são congruentes e com isso, PC = AB = 5.

OPÇÃO E

25) Temos que $BR = RS = SC = \frac{1}{3}BC.$ Sabemos ainda que, como *E* é ponto médio de *AB*, a altura do triângulo *EBR* com relação à base BR é igual à metade da altura do triângulo *ABC* com relação à base *BC* e, consequentemente, área $(EBR) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}$ área $(ABC) = \frac{1}{6}$ área (ABC). Analogamente, área $(FSC) = \frac{1}{6}$ área $(ABC) = \frac{2}{3}.252 = 168.$

OPÇÃO A

26) Como os dois círculos circunscritos são iguais, segue do teorema do ângulo inscrito que $\angle ACB = \angle ABC$ e, com isso, AB = AC.



Seja *AM* a altura relativa ao lado *BC*. Como *ABC* é isósceles de base *BC*, segue que *AM* também é mediana, e daí *MC* = 9. Portanto, *MD* = 5 e, pelo teorema de Pitágoras, *AM* = 12. Finalmente, a área do triângulo ABC é $\frac{1}{2}(AM)(BC) = \frac{1}{2}(12)(18) = 108.$

OPÇÃO A

27) Os catetos do triângulo medem *a* e *b*, e a hipotenusa mede *c*. Como a área e o perímetro são iguais, temos $\frac{1}{2}ab = a + b + c$, e daí $c = \frac{1}{2}ab - a - b$. Usando o teorema de Pitágoras, segue que $a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}ab - a - b\right)^2 = a^2 + b^2 + 2ab - a^2b - b^2a + \frac{1}{4}a^2b^2$, ou ainda $8ab - 4a^2b - 4b^2a + a^2b^2 = 0$. Dividindo por *ab*, obtemos $(a-4)(b-4) = 8$, de maneira que *a* – 4 divide 8. Portanto, os possíveis valores de a são 2, 3, 5, 6, 8 e 12. Determinando os valores de *b* e *c*, encontramos os triângulos de lados 5, 12, 13 ou 6, 8, 10.

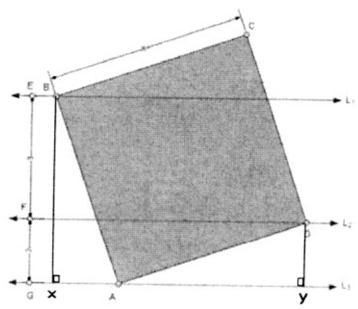
OPÇÃO E

28) Dos vértices B e D traçamos as perpendiculares BX e DY a L_3. Observe que os triângulos BXA e AYB são congruentes. Assim, temos: AY = 5, DY = 2.

Pelo teorema de Potágoras podemos afirmar que

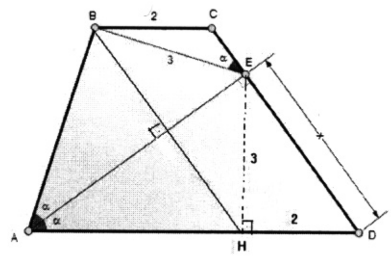
$AD^2 = AY^2 + DY^2 \rightarrow AD = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

OPÇÃO E



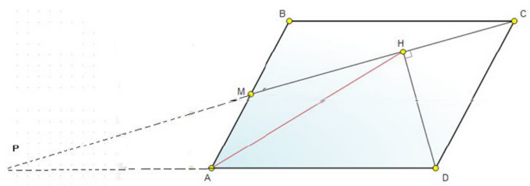
29) Seja H o pé da altura EH do triângulo AED retângulo.

O triângulo AEB é congruente com AEH (ângulo ABE = 90) e EH = 3. Como BH é perpendicular ao AE e, portanto, é paralelo ao CD. Em seguida HD = BC = 2. Aplicando Pitágoras no triângulo DHE dá x = ED = $\sqrt{13}$



OPÇÃO C

30) Como AM / CD e M é ponto médio de AB, podemos afirmar que A é médio de DP e AH é mediana relativa à tripotenusa.



Logo, AD = AH = 12 cm

OPÇÃO E